ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 31, No. 1, 1978

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE ISRAEL AHARONI SUR LES PROLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS c_0

PAR

PATRICE ASSOUAD

ABSTRACT

We give a purely metric proof of the following result: let (X, d) be a separable metric space; for all $\varepsilon > 0$ there is an injection f of X in C_0^+ such that:

$$\forall x, y \in X,\ d(x, y) \leqq \|f(x) - f(y)\|_\infty \leqq (3 + \varepsilon) d(x, y).$$

It is a more precise version of a result of I. Aharoni. We extend it to metric space of cardinal α^+ (for infinite α).

Dans [1] Israel Aharoni a montré que tout espace métrique séparable est métriquement isomorphe (c'est-à-dire Lipschitz-isomorphe) à une partie de c_0^+, cela pour des constantes d'isomorphisme universelles.

Nous donnons ici une autre démonstration de ce résultat (Proposition 2) en utilisant un argument très simple purement métrique et peu différent de la paracompacité (Proposition 1). Cela permet d'améliorer les constantes d'isomorphisme.

Notations. Soient (X, d) un espace métrique, $Y \subset X$ et $a \in]0, \infty[$. On note pour tout $x \in X$

$$B_d(x, a) = \{y \in X \mid d(x, y) < a\},$$

$$d(x, Y) = \operatorname*{Inf}_{y \in Y} d(x, y) \ (= +\infty \text{ si } Y \text{ est vide}),$$

$$\operatorname{diam}(Y, d) = \operatorname{Sup}\{d(y, y') \mid y, y' \in Y\}$$

et on dira que Y est un a-réseau de (X, d) si on a:

Received February 6, 1978

$$\forall x \in X \qquad d(x, Y) < a,$$

$$\forall y, y' \in Y \qquad y \neq y' \Rightarrow d(y, y') \geqq a.$$

PROPOSITION 1. *Soient (X, d) un espace métrique séparable, X_0 une partie de X, et $\lambda \in]2, \infty[$. Alors il existe une suite $(M_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de parties de X_0 vérifiant:*

(a) $\forall x \in X_0\ \exists i \in \mathbf{N}$ *avec* $d(x, M_i) < 1$,

(b) $\forall x \in X$, $\mathrm{Card}\{i \in \mathbf{N} \mid d(x, M_i) < \lambda - 1\} < \infty$,

(c) $\mathrm{diam}(M_i, d) < 2\lambda$.

DÉMONSTRATION. Soit $Y = \{y_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ un 1-réseau de (X, d) contenant un 1-réseau Z de (X_0, d).

On pose $M_0 = B_d(y_0, \lambda) \cap Z$ et pour tout $i \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:

$$M_i = [B_d(y_i, \lambda) \cap Z] \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} M_j.$$

Alors (a) résulte de ce que $(M_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est un recouvrement de Z, (c) résulte de ce qu'on a pour tout $i \in \mathbf{N}$, $M_i \subset B_d(y_i, \lambda)$.

Enfin soit $x \in X$. Il existe alors $j_0 \in \mathbf{N}$ vérifiant $d(x, y_{j_0}) < 1$. On a donc pour tout $i \in \mathbf{N}$:

$$d(x, M_i) < \lambda - 1 \Rightarrow d(y_{j_0}, M_i) < \lambda \Rightarrow i \leqq j_0$$

et donc:

$$\mathrm{Card}\{i \in \mathbf{N} \mid d(x, M_i) < \lambda - 1\} \leqq j_0 + 1.$$

Cela donne (b).

PROPOSITION 2. *Soient (X, d) un espace métrique séparable et $\varepsilon \in]0, \infty[$, on se donne alors $\lambda \in]2, \infty[$ et $\eta \in]0, \infty[$ vérifiant:*

$$\frac{\lambda}{\lambda - 2}(1 + \eta) = 1 + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit e un point de X. On pose alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$a_n = (1 + \eta)^{-n},$$

$$X_n = X \setminus B_d\left(e, \frac{3\lambda}{2} a_n\right),$$

$$d_n = \frac{d}{a_n};$$

$(M_{i,n})_{i \in \mathbf{N}}$ construit par la Proposition 1 pour (X, d_n) et X_n,

pour tout $i \in \mathbf{N}$ *et tout* $x \in X$, $f_{i,n}(x) = [(\lambda - 1)a_n - d(x, M_{i,n})]^+$.

On énumère à l'aide de $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ *la base canonique de* l_∞, *soit* $(e_{i,n})_{(i,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{Z}}$ *et on pose pour tout* $x \in X$:

$$f(x) = \sum_{(i,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{Z}} e_{i,n} f_{i,n}(x).$$

On a alors pour tout $x, y \in X$

$$f(x) \in c_0^+ \qquad et \qquad \frac{d(x,y)}{3+\varepsilon} \leqq \|f(x) - f(y)\|_{c_0} \leqq d(x,y).$$

Démonstration. (a) En effet soient $x \in X$, $m, n_0 \in \mathbf{Z}$ avec $f_{i,m}(x) \geqq (\lambda - 1)a_{n_0}$. On a alors:

$$m \leqq n_0$$

et $B_d(x, (\lambda - 1)a_m) \cap X_m \neq \varnothing$ c'est-à-dire $d(x, e) > \frac{1}{2}(\lambda + 2)a_m$. Donc

$$\mathrm{Card}\{(i,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \mid f_{i,n}(x) \geqq (\lambda - 1)a_{n_0}\} < \infty.$$

Donc $f(x)$ appartient à c_0.

(b) Soient $x, y \in X$ $x \neq y$. Soit $n \in \mathbf{Z}$ vérifiant:

$$3\lambda a_n \leqq d(x,y) < 3\lambda(1+\eta)a_n.$$

Quitte à échanger x et y on peut supposer qu'on a $d(x,e) \geqq \frac{3}{2}\lambda a_n$ c'est-à-dire $x \in X_n$. Il existe donc $i \in \mathbf{N}$ avec $d(x, M_{i,n}) < a_n$. Donc on a $f_{i,n}(x) > (\lambda - 2)a_n$. D'autre part le support de $f_{i,n}$ est contenu dans

$$B_d(x, a_n + 2\lambda a_n + (\lambda - 1)a_n) = B_d(x, 3\lambda a_n).$$

On a donc $f_{i,n}(y) = 0$. Cela donne:

$$\|f(x) - f(y)\|_{c_0} \geqq |f_{i,n}(x) - f_{i,n}(y)| > (\lambda - 2)a_n$$
$$\geqq \frac{\lambda - 2}{3\lambda(1+\eta)}\, d(x,y) = \frac{d(x,y)}{3+\varepsilon}.$$

La proposition est démontrée.

Remarque. Si $\mathrm{diam}(X, d)$ est fini la démonstration se simplifie en prenant $X_n = X$ pour tout n et en se restreignant à $\{n \mid 3\lambda a_n \leqq \mathrm{diam}(X, d)\}$.

Enfin on peut noter que les démonstrations précédentes s'adaptent aisément au cas non séparable et même se simplifient donnant la:

PROPOSITION 3. *Soient α un cardinal infini, α^+ son successeur et S_{α^+} l'espace des applications $x: i \to x_i$ de $\{i \mid i$ ordinal, $\operatorname{card} i < \alpha^+\}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant:*

$$\operatorname{Card}\{i \mid x_i \neq 0\} < \alpha^+$$

on le munit de la norme $\|x\| = \operatorname{Sup}\{|x_i| \mid i$ ordinal, $\operatorname{Card} i < \alpha^+\}$. Alors S_{α^+} est un espace de Banach de cardinal 2^α.

De plus pout tout $\varepsilon \in]0, \infty[$ et tout espace métrique (X, d) de cardinal α^+ (en particulier tout espace métrique (X, d) ayant une partie dense de cardinal α^+) il existe une application f de (X, d) dans $S^+_{\alpha^+}$ vérifiant pour tout $x, y \in X$

$$\frac{d(x,y)}{3+\varepsilon} \leqq \|f(x) - f(y)\|_{S_{\alpha^+}} \leqq d(x,y).$$

On notera enfin que sous l'hypothèse généralisée du continu on a $\operatorname{Card}(S_{\alpha^+}) = \alpha^+$.

DÉMONSTRATION. C'est une adaptation immédiate des démonstrations précédentes. Au lieu de l'ordre naturel de $\mathbf{N}$ on utilise le fait que tout ensemble de cardinal inférieur ou égal à α^+ (en particulier un 1-réseau de (X, d)) admet un bbon ordre pour lequel tout sous-ensemble majoré est de cardinal strictement inférieur à α^+.

REFERENCE

1. I. Aharoni, *Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0^+*, Israel J. Math. **19** (1974), 284–291.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS-SUD-BÂT. 425
91405 ORSAY, FRANCE